A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT 3r., sem. letni
LISTA 13

Wrocław, 30 maja 2011

Potrzebne nam będą: jedno twierdzenie i dwie definicje.

Twierdzenie Hahna–Banacha (o przedłużaniu funkcjonału) Niech V_0 będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej unormowanej V (nawet nie zakładamy zupełności) i niech P_0 będzie funkcjonałem określonym na V_0, o normie r. Wtedy istnieje, określony na V funkcjonał P o normie r taki, że $P|_{V_0} = P_0$.

(Dowód będzie albo na ostatnim wykładzie, albo w formie konspektu.)

DEFINICJA 1 Niech v_n będzie ciągiem elementów przestrzeni liniowej unormowanej V i niech $v \in V$. Powiemy, że ciąg v_n *zbiega słabo* do v jeśli dla każdego funkcjonału $P \in V^*$ zachodzi zbieżność: $P(v_n) \to P(v)$.

DEFINICJA 1 Niech P_n będzie ciągiem funkcjonałów określonych na przestrzeni liniowej unormowanej V i niech $P \in V^*$. Powiemy, że ciąg P_n *zbiega $*$-słabo* do P jeśli dla każdego elementu $v \in V$ zachodzi zbieżność: $P_n(v) \to P(v)$.

Z A D A N I A

ZADANIE 1. Na podstawie Tw. Hahna–Banacha udowodnij istnienie "funkcjonału wyciągającego normę": Dla każdego $v \in V$ istnieje funkcjonał P o normie 1, taki że $|P(v)| = \|v\|$.

ZADANIE 2. Wykaż, że granica $*$-słaba jest jedyna. Podobnie wykaż, że granica słaba jest jedyna (skorzystaj z zadania 1).

ZADANIE 3. Na przestrzeni V^* określiliśmy właśnie dwie zbieżności: słabą oraz $*$-słabą. Sprawdź, że $*$-słaba jest słabsza od słabej. Udowodnij, że w przestrzeniach refleksywnych zbieżność słaba i $*$-słaba na V^* są równoważne.

ZADANIE 4. Wykaż, że zbieżność słaba jest słabsza zbieżności w normie.

ZADANIE 5. Udowodnij Tw. Banacha–Alaoglu przy założeniu, że V jest ośrodkowa: Kula jednostkowa (w normie) w przestrzeni V^* jest ciągowo zwarta w topologii $*$-słabej zbieżności.

ZADANIE 6. Zidentyfikuj zbieżności słabe w przestrzeniach c_0, ℓ^1, ℓ^2 oraz $C(X)$ (X - zwarta).

ZADANIE 7. Zidentyfikuj zbieżności $*$-słabe w przestrzeniach ℓ^1 (jako sprzężonej do c_0) oraz ℓ^∞ (jako sprzężonej do ℓ^1).

ZADANIE 8. (Bogolyubov–Krylov). Niech $T : X \to X$ będzie transformacją ciągłą przestrzeni zwartej X. Udowodnij istnienie probabilistycznej miary T-niezmienniczej, tzn. takiej, że $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A)$.

Wskazówka: Na $C(X)$ rozważ ciąg miar $\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{T^n(x_0)}$, gdzie T^n oznacza $T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n razy), x_0 jest dowolnym punktem w X, a δ_x oznacza miarę atomową w punkcie x. Następnie skorzystaj z tw. Banacha–Alaoglu.

Tomasz Downarowicz